

Решение логических задач.

1. Определение верности предположений.

Задачи данного типа решаются методом составления логического выражения. Последовательность решения задачи обычно бывает следующей:

1. Изучение условия задачи;
2. Введение системы обозначений для логических высказываний;
3. Установление логических связей между всеми высказываниями, соответствующих условию задачи;
4. Конструирование логической формулы и определение значения ее истинности;
5. Упрощение логической формулы с применением законов алгебры логики;
6. Логический вывод на основе полученного высказывания

Задача 1.

Условие:

Алеша, Боря и Гриша нашли в земле старинный сосуд. Рассматривая находку, каждый высказал по два предположения.

- Алеша: сосуд греческий и изготовлен в V веке:

- Боря: сосуд финикийский и изготовлен в III веке;
- Гриша: сосуд не греческий и изготовлен в IV веке.

Учитель истории сказал ребятам, что каждый из них прав только в одном из двух предположений.

Что это был за сосуд?

Решение:

Введем переменные:

a – греческий сосуд;

b – финикийский сосуд;

c – сосуд, изготовленный в III веке;

d – сосуд, изготовленный в IV веке;

e – сосуд, изготовленный в V веке;

Поскольку для истинности предположения каждого из ребят достаточно истинности лишь одной из переменных, то

предположению Алеши соответствует формула: $a + e = 1$;

предположению Бори соответствует формула: $b + c = 1$;

предположению Гриши соответствует формула: $-a + d = 1$

Объединим все формулы в одну операцией конъюнкции (так как в общем истинность ре-

зультата достигается при истинности всех дизъюнкций) и упростим:

$$(a + e)(b + c)(-a + d) = (b * (a + e) + c * (a + e))(-a + d) = (ba + be + ac + ce)(-a + d) = ab(-a + d) + bc(-a + d) + ac(-a + d) + ce(-a + d) = a-ab + abd + be-a + bed + a-ac + acd + -ace + cde =$$

$$0 + abd + be-a + bed + 0 + acd + -ace + cde = 1$$

Выражения, которые приобретают значение 0, в логической сумме не учитываются.

Кроме того, из полученного выражения исключаем формулы, являющиеся заведомо ложными, исходя из того, что сосуд не может быть одновременно и греческим и финикийским, и не может быть изготовлен одновременно в разные века:

$$abd = 0; bed = 0; acd = 0; -ace = 0; cde = 0$$

Остается: **-abe = 1**

Ответ:

Сосуд финикийский V века.

Задача 2.

Условие:

Однажды гномы, решившие отправиться за сокровищами,



собрались на совет, чтобы обсудить возможные опасности, которые их ожидают. Было высказано три предположения:

- Их либо захватят гоблины, либо нападет дракон, либо они заблудятся в лесу, либо их ожидают две или сразу три из этих неприятностей;
- Если дракон не нападет, то они утонут в реке;
- И дракон нападет, и они заблудятся в лесу

Помогавший им волшебник успокоил их и сказал, что второе и третье предположение ложны.

Каких же опасностей стоит ожидать гномам?

Решение:

Введем логические переменные:

x – гномов захватят гоблины;

y – на гномов нападет дракон;

z – они утонут в реке;

w – они заблудятся в лесу

Первое предположение можно записать в виде формулы: $x + y + w$

По второму предположению: $\neg y \rightarrow z$ ($\equiv y + z$) 

 возможность замены операции импликации операцией дизъюнкции мы рассмотрели в уроке 22

По третьему предположению: $y * w$

Поскольку второе и третье предположение ложны, в общей формуле их необходимо записать со знаком отрицания. Тогда объединение трех исходных формул операцией логического умножения даст общую формулу, которую необходимо упростить с применением законов алгебры логики:

$$\begin{aligned} (x + y + w) * \neg(-y \rightarrow z) * \neg(yw) &= (x + y + w) * \neg(y \\ &+ z) * \neg(yw) = (x + y + w) * \neg y - z * (\neg y + \neg w) = (x - y - z \\ &+ y - y - z + w - y - z) * (\neg y + \neg w) = (x - y - z + w - y - z) * (\neg y \\ &+ \neg w) = \neg y - z (x + w) (\neg y + \neg w) \end{aligned}$$

В полученном выражении $\neg y - z (x + w) (\neg y + \neg w) = 1$ без отрицания записаны переменные x и w .

Запись вида

$$\begin{aligned} \neg Y \text{ И } \neg Z \text{ И } (X \text{ ИЛИ } W) \text{ И } \neg Y \text{ ИЛИ } \neg W \\ = 1 \end{aligned}$$

Более наглядно иллюстрирует результат вычислений.

Ответ:

Гномам следует опасаться нападения гоблинов и подготовиться к переходу через лес.

2. Задачи «о лгунах».

В задачах такого вида обычно предлагаются для решения несколько посылок, которые являются полностью или частично ложными. Задачи решаются аналогично предыдущему типу. При составлении исходных формул применяется операция дизъюнкции.

Задача 5.

Условие:

Брауну, Джону и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии

- Браун показал, что преступники скрылись на синем «Бьюике»;
- Джон сказал, что это был черный «Крайслер»;
- Смит утверждает, что это был «Форд «Мустанг»» и ни в коем случае не синий.

Стало известно, что каждый, желая запутать следствие, указал правильно либо только цвет, либо только марку. Что это был за автомобиль?

Решение:

Введем переменные:

а – синяя машина;

б – «Бьюик»;

c – черная машина;

d – «Крайслер»;

e – «Форд «Мустанг»»

Показаниям Брауна соответствует выражение: $a + b = 1$;

Показаниям Джона соответствует формула: $c + d = 1$;

Показаниям Смита соответствует формула: $-a + e = 1$

Поскольку в указанных выражениях истинна только одна переменная, они объединяются знаком дизъюнкции.

Для составления общей формулы, чтобы она имела значение истинности, все три выражения необходимо объединить знаками конъюнкции, затем формулу необходимо упростить:

$$(a + b) (c + d) (-a + e) = (c * (a + b) + d * (a + b)) *$$

$$(-a + e) = (ca + cb + da + db) (-a + e) =$$

$$ca (-a + e) + cb (-a + e) + da (-a + e) + db (-a + e) =$$

$$ca-a + cae + cb-a + cbe + da-a + dae + db-a + dbe =$$

$$0 + cae + cb-a + cbe + 0 + dae + db-a + dbe = \mathbf{cae +}$$

$$\mathbf{cb-a + cbe + dae + db-a + dbe = 1}$$

Исключаем заведомо ложные варианты, исходя из того, что машина не может быть одновременно двух марок или двух цветов.

$$cae = 0; cbe = 0; dae = 0; dbe = 0; db-a = 0$$

Остается: **cb-a = 1**

Ответ:

Преступники скрылись на черном «Бьюике».

Задача 6.

Условие:

Виктор, Роман, Леонид и Сергей заняли на олимпиаде по информатике 4 первых места. Когда их спросили о распределении мест, они дали такие ответы:

- Сергей первый, Роман второй;
- Сергей второй, Виктор третий;
- Леонид второй, Виктор четвертый

Известно, что в каждом ответе только одно утверждение истинно.

Как распределились места?

Решение:

Для данной задачи удобно ввести переменные, в имя которых входит первая буква имени мальчика и номер места, занятого на олимпиаде, тогда каждый из ответов, данный на вопрос о распределении мест, можно записать следующими выражениями:

Первому утверждению соответствует: $S1 + R2 = 1$;

Второму утверждению соответствует: $S2 + V3 = 1$;

Третьему утверждению соответствует: $L2 + V4 = 1$

Объединение формул, соответствующих каждому из утверждений, операцией конъюнкции дает общее выражение, которое является истинным и которое необходимо упростить:

$$(S1 + R2) (S2 + V3) (L2 + V4) = 1$$

$$(S2 (S1 + R2) + V3 (S1 + R2)) (L2 + V4) = 1$$

$$(S2S1 + S2R2 + V3S1 + V3R2)(L2 + V4) = 1$$

Переменные $S2S1$ и $S2R2$ из выражения исключаются как заведомо ложные ($S2S1 = 0$, $S2R2 = 0$)

$$(V3S1 + V3R2)(L2 + V4) = 1$$

$$L2 (V3S1 + V3R2) + V4 (V3S1 + V3R2) = 1$$

$$L2V3S1 + V3R2L2 + V4V3S1 + V3V4R2 = 1$$

Из полученного выражения снова необходимо исключить заведомо ложные утверждения.

$$V4V3S1 = 0; V3R2L2 = 0; V3V4R2 = 0$$

Остается:

$$\mathbf{L2V3S1 = 1, \rightarrow R4.}$$

Ответ:

Сергей – первый, Леонид – второй, Виктор – третий, Роман – четвертый.

Задача 7.

Четырех инопланетянок, Ное, Энне, Валли и Орадо, прилетевших на Землю, спросили об их возрасте. Были получены следующие ответы:

1. Ное - 22 года, Энне - 21 год
2. Валли - 19 лет, Ное - 21 год
3. Орадо - 21 года, Валли - 18 лет

Стало известно, что все инопланетянки - разных возрастов, но все возраста совпадают с названными данными: 18, 19, 21 и 22. В каждом ответе истина - только одна часть, вторая - ложь.

Сколько лет каждой инопланетянке?

Задача 8.

Четыре ученицы: Катя, Аня, Инна, Вера участвовали в соревнованиях по гимнастике и заняли первые 4 места. На вопрос, кто из них какое место занял, 3 девочки ответили:



1. Инна - вторая, Вера - третья;
2. Инна - первая, Аня - вторая;
3. Катя - вторая, Вера - четвертая.

В каждом из этих ответов одна часть истина, другая ложь. Кто и какие места занял в соревнованиях?

3. Вычисление соблюдения заявленных условий.

Задача 9.

Условие:

При составлении расписания на вторник преподаватели 11а класса высказали просьбы завучу:

- Учитель математики: поставить первый или второй урок;
- Учитель физики: поставить первый или третий урок;
- Учитель литературы: поставить второй или третий урок;

Какое расписание будет составлено?

Решение:

Введем переменные, имена которых содержат первую букву предмета и номер урока. Тогда пожелания учителей можно будет выразить следующими формулами:

Учителя математики: $M1 + M2$

Учителя физики: $F1 + F3$

Учителя литературы: $L2 + L3$

Общая формула объединяет указанные выражения операцией конъюнкции, так как для ее истинности должны соблюдаться все условия:

$$(M1 + M2) * (F1 + F3) * (L2 + L3) = 1$$

$$(M1\Phi1 + M2\Phi1 + M1\Phi3 + M2\Phi3) (Л2 + Л3) = 1$$

$M1\Phi1 = 0$ – заведомо ложное выражение;

$$(M2\Phi1 + M1\Phi3 + M2\Phi3) (Л2 + Л3) = 1$$

$$\mathbf{M2\Phi1Л2} + M1\Phi3Л2 + \mathbf{M2\Phi3Л2} + M2\Phi1Л3 + \mathbf{M1\Phi3Л3} + \mathbf{M2\Phi3Л3} = 1$$

Исключим заведомо ложные выражения:

$$M2\Phi1Л2 = 0, M2\Phi3Л2 = 0, M1\Phi3Л3 = 0,$$

$$M2\Phi3Л3 = 0.$$

Остается:

$$\mathbf{M1\Phi3Л2} + \mathbf{M2\Phi1Л3} = 1$$

Оба варианта совпадают с заявленными условиями.

Ответ:

Расписание может быть составлено в двух вариантах:

1 – математика, 2 – литература, 3 – физика;

1 – физика, 2 – математика, 3 – литература

Задача 10.

Условие:

Менеджер банка должен установить четыре банкомата. В течение каждого дня работы должны выполняться следующие условия:

- Если работает первый банкомат, то третий не должен работать, а второй и четвертый должны работать;
- Если работает третий банкомат, то первый и четвертый не должны работать, а второй должен работать;
- Должен работать, по крайней мере, один банкомат

Необходимо определить наибольшее число дней, которое могут работать банкоматы при соблюдении этих условий, чтобы их назначение ни в один из дней не повторялось, и указать расписание на каждый день:

Решение:

Введем переменные:

w – работает первый банкомат;

x – работает второй банкомат;

y – работает третий банкомат;

z – работает четвертый банкомат

Заменяем операцию импликации операцией дизъюнкции по формуле: $a \rightarrow b = \neg a + b$.

С учетом этого составляем формулы:

первое условие выражается формулой: $w \rightarrow \neg yxz = \neg w + \neg yxz = 1$

второе условие $y \rightarrow \neg w - zx = \neg y + \neg w - zx = 1$

Первые два условия должны выполняться одновременно, поэтому приведенные формулы объединяем операцией конъюнкции и упрощаем функцию:

$$\begin{aligned} (-w + -yxz) (-y + -w-zx) &= (-w + -yxz) * -y + (-w + -yxz) * -w-zx \\ &= -w-y + -y-yxz + -w-w-zx + -yxz-w-zx \\ &= -w-y + -yxz + -w-zx \end{aligned}$$

Далее в каждую часть нужно добавить (соединить методом конъюнкции) недостающие банкоматы так, чтобы выражение (формула) было эквивалентно исходному, поэтому добавленная часть должна принимать значение 1:

$$\begin{aligned} (xz + -x-z + -xz + x-z) &= 1 \\ (w + -w) &= 1 \\ (y + -y) &= 1 \end{aligned}$$

При логическом умножении на приведенные выше формулы значение каждой части выражения не изменится, так как $x * 1 = x$, поэтому не изменится и значение всей формулы в целом.

$$\begin{aligned} -w-y (xz + -x-z + -xz + x-z) + -yxz (w + -w) + -w-zx (y + -y) &= 1 \\ &= -w-yxz + -w-y-x-z + -w-yx-z + -w-y-xz + -yxz-w + -yxzw + -w-zx-y + -w-zxy \end{aligned}$$

Из получившегося выражения исключаем две группы логического умножения, так как:

$-w-uxz$ – повторяется (пятая группа $-uxz-w$ эквивалентна, а по условию повторений быть не должно);

$-w-y-x-z$ – противоречит третьему условию

Остается:

$$-w-ux-z + -w-y-xz + -uxz-w + \mathbf{-yxzw} + -w-zx-y + \mathbf{-w-zxy}$$

В данной формуле переменная без знака отрицания соответствует работающему банкомату, четвертая группа соответствует первому условию, последняя группа соответствует второму условию, и общее число дней равно 6.

Ответ:

Работа банкоматов должны осуществляться по следующему графику:

- 1) В первый день работает только второй банкомат;
- 2) Во второй день работает четвертый банкомат;
- 3) В третий день работают второй и четвертый банкомат;
- 4) В четвертый день работают первый, второй и четвертый банкомат;
- 5) В пятый день работает второй банкомат;
- 6) В шестой день работают второй и третий банкомат